Gyldighet er ikke avgjørbart

Vi har vist hvordan vi kan simulere beregninger i automater med første ordens logikk. Vi kan også simulere turingmaskiner. Siden stoppeproblemet er ikke avgjørbart, så kan vi heller ikke avgjøre om et første ordens utsagn er gyldig. La oss gi noen detaljer:

Simulering av turingmaskiner

En tape på en turingmaskin kan sees som to stakker. La oss tenke oss at vi har følgende tape

Λ	Λ	a	a	b	a	b	c	d	a	c	b	b	b	Λ	Λ	Λ	Λ

der den fargede ruten er den som blir scannet. Da kan vi representere tapen ved to stakker – en for venstre del og en for høyre.

c	d
b	a
a	c
b	b
a	b
a	b

En må bestemme seg for hvordan en skal representere den haugen med blanke som vil være nederst i stakkene. Her har jeg bare kuttet dem ut – men det er mange måter å gjøre det på. Det som er viktig er at transisjonene med LES / SKRIV / BEVEGELSE bare berører de øverste elementene i de to stakkene – og det kan vi simulere i første ordens logikk slik vi alt kjenner til fra simulering av automater.

En beregning som stopper blir simulert ved spørsmålet om et utsagn

$$\text{START} \wedge \text{PROGRAM} \rightarrow \text{FINAL}$$

er gyldig. Spesielt kan vi representere stoppeproblemet slikt – og kan konkludere at gyldighet er ikke avgjørbart. Dette er det vi strever med i sekventkalkyle for første ordens logikk. Gitt et utsagn U. Vi kan lage mer og mer av en fair utledning over U, men vi kan ikke være sikker på om den utledningen stopper i et bevis eller ikke. Det er bare delvist beregnbart.

Dette var det problemet som Alan Turing ville løse med sin 1936 artikkel om turingmaskiner.